Bernhard Szallies

Die Lorentz-Transformation

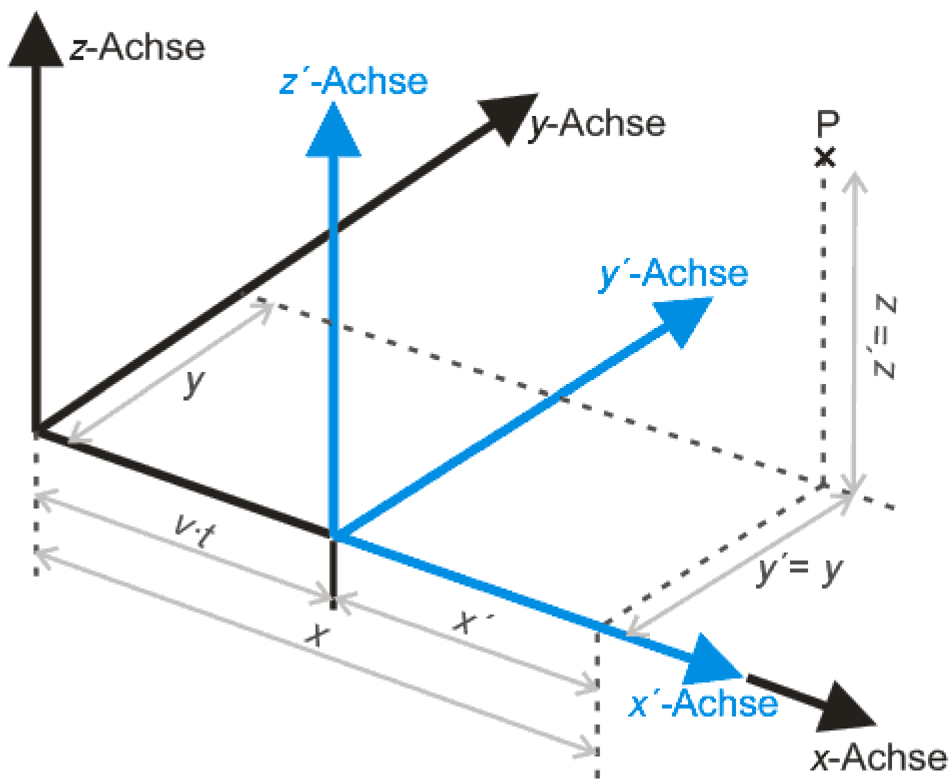
Die Lorentz-Transformation stellt die rechnerische Beziehung zwischen den Ortskoordinaten und der Zeitkoordinate eines Ereignisses bezüglich zweier Inertialsysteme her, die sich gegeneinander mit einer Relativgeschwindigkeit vom Betrag v = konst. bewegen. Sie ersetzt in der speziellen Relativitätstheorie die Galilei-Transformation der auf Galilei und Newton zurückgehenden klassischen Mechanik.

Die Lorentz-Transformation ist die Grundlage für die relativistische Kinematik und die relativistische Dynamik. Sie führt (u. a.) zu den Formeln für die relativistische Addition von Geschwindigkeiten, für die Zeitdilatation, die Längenkontraktion, die relativistische Masse und die Äquivalenz von Masse und Energie mit der berühmten Formel $E = m \cdot c^2$.

Gegeben seien zwei Inertialsysteme mit den kartesischen Koordinatensystemen S und S′ (s. Abb.). Ein Ereignis wird in S durch die Koordinaten x, y, z, t festgelegt, in S′ durch die Koordinaten x', y', z', t'. Die x'-Achse falle mit der x-Achse zusammen, y'- und y-Achse sowie z'- und z-Achse seien parallel.

Das System S′ bewege sich gegenüber dem System S mit der Relativgeschwindigkeit vom Betrag $v > 0$ in Richtung der positiven x-Achse. Zur Zeit $t = t' = 0$ sollen die Ursprünge beider Koordinatensysteme zusammenfallen.

In beiden Systemen sollen völlig gleiche Uhren zur Zeitmessung benutzt werden. Die Uhren in einem System seien jeweils untereinander synchronisiert.



In der klassischen Mechanik werden die Koordinaten eines Ereignisses von einem Inertialsystem in das andere mit Hilfe der Galilei-Transformation umgerechnet. Für den Zusammenhang von x- und x'-Koordinate ergibt sich hier:

$x = x' + v \cdot t'$ und $x' = x - v \cdot t$ mit $t = t'$.

Die Galilei-Transformation berücksichtigt das Relativitätsprinzip der Mechanik wie auch dessen Erweiterung, das Relativitätsprinzip der Physik, also die Gleichwertigkeit aller Inertialsysteme zur Beschreibung aller physikalischen Vorgänge, nicht aber die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Nach der klassischen Addition der Geschwindigkeiten müssten sich alle im System S gemessenen Geschwindigkeiten um v von den jeweils in S′ gemessenen unterscheiden ($u = u' + v$). Dies widerspricht aber für $u = c$ der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ($u = u' = c$).

Durch Einführung eines Korrekturfaktors γ in die Galilei-Transformation kann diese derart erweitert werden, dass neben dem Relativitätsprinzip auch die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit berücksichtigt wird. Für die Transformation der x- bzw. x'-Koordinate, die in der Galilei-Transformation

$x = x' + v \cdot t'$ und $x' = x - v \cdot t$

lautet, wird der Ansatz

$x = \gamma \cdot (x' + v \cdot t')$ und $x' = \gamma \cdot (x - v \cdot t)$

gewählt. Infolge des Relativitätsprinzips der Physik (die Systeme S und S′ sind gleichwertig) muss in beiden Gleichungen der gleiche Korrekturfaktor γ stehen.

Einige Vorüberlegungen zum Korrekturfaktor γ:

Der Korrekturfaktor γ wird weder von der Orts-, noch von der Zeitkoordinate abhängig sein, da alle Raum- und Zeitpunkte gleichberechtigt sind. Dagegen wird er von der Relativgeschwindigkeit v abhängen: $\gamma = \gamma(v)$. Für $v \rightarrow 0$ muss $\gamma(v) \rightarrow 1$ gehen: $\gamma(0) = 1$ (Übergang zur Galilei-Transformation, für $v = 0$ fallen S und S′ ständig zusammen). Außerdem muss $\gamma(-v) = \gamma(v)$ sein, da wegen der Gleichwertigkeit der Systeme S und S′ die Vertauschungsregeln wie bei der Galilei-Transformation gelten müssen. Die Gleichungen zur Umrechnung der Koordinaten von einem System in das andere gehen danach auseinander hervor, indem man x durch x', y durch y', z durch z', t durch t', v durch $v' = -v$ ersetzt und umgekehrt.

$\gamma(-v) = \gamma(v)$ könnte z. B durch $\gamma(v^2)$ erfüllt werden. Eine Dimensionsbetrachtung des Korrekturansatzes zeigt zudem (wie schon die betrachteten Sonderfälle), dass γ eine dimensionslose Zahl sein muss, sich die Einheit von v also rauskürzen muss. Das könnte z. B. durch $\gamma(v^2/c^2)$ erfüllt werden.

Der Korrekturfaktor γ wird wie folgt bestimmt:

Zur Zeit $t = t' = 0$ (wenn also nach Voraussetzung beide Koordinatensysteme gerade zusammenfallen) werde im Ursprung von S ein Lichtblitz ausgesendet. Das Licht legt im System S entlang der x-Achse bis zu einem Punkt P in der Zeit t den Weg $x = c \cdot t$ zurück, im System S′ den Weg $x' = c \cdot t'$, denn die Lichtgeschwindigkeit hat in beiden Systemen den selben Wert c. Da $x \neq x'$, ist auch $t \neq t'$.

Aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit folgt also, dass in den Systemen S und S′ unterschiedliche Zeitspannen für den gleichen Vorgang gemessen werden. Dies erfordert die Einführung einer jeweils eigenen Systemzeit für die Systeme S und S′ und eine Transformationsgleichung zur Umrechnung der Systemzeiten t und t' ineinander.

Setzt man $t = x/c$ und $t' = x'/c$ in den obigen Korrekturansatz ein, so folgt:

$$x = \gamma\left(x' + v \cdot \frac{x'}{c}\right) \quad \text{und} \quad x' = \gamma\left(x - v \cdot \frac{x}{c}\right)$$

$$x = \gamma \cdot x' \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right) \quad \text{und} \quad x' = \gamma \cdot x \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Durch Multiplikation der linken sowie der rechten Seiten beider Gleichungen ergibt sich:

$$x \cdot x' = x \cdot x' \cdot \gamma^2 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Daraus folgt

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \ .$$

Da $\gamma > 0$ sein muss wegen $\gamma(0) = 1$, folgt daraus der Korrekturfaktor γ zu

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{mit} \quad v < c \ .$$

Die in den Systemen S und S′ unterschiedlich ablaufende Zeit ($t \neq t'$) bedingt entsprechende Transformationsgleichungen für die Zeit. Mit $t = x/c$ folgt

$$t = \gamma \cdot \left(\frac{x'}{c} + \frac{v}{c} \cdot t'\right).$$

Mit $t' = x'/c$ folgt weiter

$$t = \gamma \cdot \left(t' + \frac{v}{c^2} \cdot x' \right).$$

Die entsprechende Gleichung für t' erhält man nach dem Relativitätsprinzip, indem man t durch t', t' durch t, x' durch x und v durch $-v$ ersetzt:

$$t' = \gamma \cdot \left(t - \frac{v}{c^2} \cdot x \right).$$

Da die Relativbewegung längs der x-Achse erfolgt, transformieren sich die beiden anderen Ortskoordinaten ohne Änderung: $y = y'$, $z = z'$ und umgekehrt.

Als Konsequenz aus dem Relativitätsprinzip der Physik und der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit muss die Galilei-Transformation durch die sogen. Lorentz-Transformation ersetzt werden.

Die Gleichungen der Lorentz-Transformation lauten:

$$x = \gamma \cdot (x' + v \cdot t') \qquad x' = \gamma \cdot (x - v \cdot t)$$

$$y = y' \qquad y' = y$$

$$z = z' \qquad z' = z$$

$$t = \gamma \cdot \left(t' + \frac{v \cdot x'}{c^2} \right) \qquad t' = \gamma \cdot \left(t - \frac{v \cdot x}{c^2} \right)$$

$$\text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Die Lorentz-Transformation erfüllt die Vertauschungsregeln. Der relativistische (Korrektur-) Faktor γ, der auch als Lorentz-Faktor bezeichnet wird, hat, wie oben gefordert, wegen $(-v)^2 = v^2$ in beiden Systemen den gleichen Wert. Ein reeller (und endlicher) Wert für γ ergibt sich nur für $v < c$. Hierin kommt die Lichtgeschwindigkeit als Grenzgeschwindigkeit zum Ausdruck.

Der Wert des Lorentz-Faktors γ hängt vom Betrag *v* der Relativgeschwindigkeit beider Systeme ab. Stets gilt $\gamma \geq 1$. Für $v \to 0$ geht $\gamma \to 1$, die Lorentz-Transformation geht also in die Galilei-Transformation über, wenn die Relativgeschwindigkeit zweier Inertialsysteme klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit ist. Die auf Galilei und Newton zurückgehende klassische Physik ist als Grenzfall für $v \ll c$ (und damit $\gamma \approx 1$) in der umfassenderen von Albert Einstein begründeten relativistischen Physik enthalten.

Häufig wird $v/c = \beta$ gesetzt. Damit ergibt sich der Lorentz-Faktor zu

$$\gamma = 1 \Big/ \sqrt{1-\beta^2}$$

Merkliche Abweichungen der Lorentz-Transformation von der Galilei-Transformation ergeben sich erst für vergleichsweise hohe Relativgeschwindigkeiten, wie den nachfolgenden Werten für γ zu entnehmen ist:

v = 3600 km/h = 10^3 m/s	$\gamma \approx$ 1,000000000005
v = 0,1 $c \approx 2{,}998 \cdot 10^7$ m/s	$\gamma \approx$ 1,005
v = 0,5 $c \approx 1{,}499 \cdot 10^8$ m/s	$\gamma \approx$ 1,155
v = 0,9 $c \approx 2{,}698 \cdot 10^8$ m/s	$\gamma \approx$ 2,294
v = 0,99 $c \approx 2{,}968 \cdot 10^8$ m/s	$\gamma \approx$ 7,089
v = 0,999 $c \approx 2{,}997 \cdot 10^8$ m/s	$\gamma \approx$ 22,37

Für $c \to \infty$ ginge $\gamma \to 1$ und die Lorentz-Transformation damit in die Galilei-Transformation über. Dies zeigt die Rolle der Endlichkeit der Signalgeschwindigkeit *c* für die Beschreibung von Ereignissen bezüglich unterschiedlicher Inertialsysteme.

Albert Einstein (1879–1955) hat bei der Abfassung der speziellen Relativitätstheorie (1905) für obige Transformationsgleichungen die Bezeichnung „Lorentz-Transformation“ benutzt. Der niederländische Physiker Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928) hatte diese Gleichungen bereits 1899 in anderem Zusammenhang aufgestellt.

Näheres zur speziellen Relativitätstheorie in: Szallies, Physik 2, Auer-Verlag